数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 77-83

Oscillation theorems for 4-dimensional Emden-Fowler differential systems

愛媛大・理　内藤 学 (Manabu Naito)
Faculty of Science, Ehime University

1. 序

この論文の内容は, 呉奮韜氏 (東北師範大学・数学系, 中国) との共同研究である.

ここでは, 次の 1 階 4 次元微分方程式系

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_1' &= a_1(t)|u_2|^{\lambda_1}\mathrm{sgn}\, u_2 \\
u_2' &= a_2(t)|u_3|^{\lambda_2}\mathrm{sgn}\, u_3 \\
u_3' &= a_3(t)|u_4|^{\lambda_3}\mathrm{sgn}\, u_4 \\
u_4' &= -a_4(t)|u_1|^{\lambda_4}\mathrm{sgn}\, u_1
\end{aligned}
\right. \tag{1.1}
$$

を考える. ここで, $i = 1, 2, 3, 4$ に対して, λ_i は正の定数, $a_i(t)$ は区間 $[t_0, \infty)$ 上の連続関数で $a_i(t) > 0$ $(t \geq t_0)$ と仮定する.

区間 $I \subset [t_0, \infty)$ で定義されたベクトル関数 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が I 上の (1.1) の解であるというのは, $\boldsymbol{u}(t)$ の各々の成分 $u_i(t)$ が I で定義された C^1 級の関数で, 各 $t \in I$ において (1.1) が満たされることである. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が無限区間 $[T, \infty)$, $T \geq t_0$, 上の (1.1) の解であるとき, (1.1) における係数 $a_i(t)$ は $a_i(t) > 0$ $(t \geq t_0)$ を満たすと仮定しているから, $\boldsymbol{u}(t)$ のある成分 $u_i(t)$ が非振動的 (nonoscillatory) ならば, 他の成分も非振動的であり, また, $\boldsymbol{u}(t)$ のある成分 $u_i(t)$ が振動的 (oscillatory) ならば, 他の成分も振動的である. ここでは, 簡単のため, 前者のとき (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ は非振動的 (nonoscillatory) であるといい, 後者のとき (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ は振動的 (oscillatory) であるという.

我々の目的は, (1.1) が非振動的な解をもつための必要十分条件 (言い換えれば, 対偶の命題として, (1.1) のすべての解が振動的であるための必要十分条件) を見い出すことである. (1.1) の形の 1 階 4 次元微分方程式系は既に論文 [4] において

$$
\int_{t_0}^{\infty} a_i(t)\, dt = \infty, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.2}
$$

の場合と

$$
(1.3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} a_1(t)\,dt = \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_2(t)\,dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_3(t)\,dt = \infty, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} a_1(t)\left(\int_{t}^{\infty} a_2(s)\,ds\right)^{\lambda_1} dt = \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_2(t)\left(\int_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds\right)^{\lambda_2} dt = \infty \end{cases}
$$

の場合が議論されているから, ここでは

$$
(1.4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} a_1(t)\,dt = \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_2(t)\,dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_3(t)\,dt = \infty, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} a_1(t)\left(\int_{t}^{\infty} a_2(s)\,ds\right)^{\lambda_1} dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_2(t)\left(\int_{t_0}^{t} a_3(s)\,ds\right)^{\lambda_2} dt < \infty \end{cases}
$$

の場合を考察する.

微分方程式系 (1.1) についての結果を述べる前に, 系 (1.1) は単独微分方程式

$$
(1.5)\qquad (r_3(t)(r_2(t)(r_1(t)u')')')' + p(t)|u|^{\beta-1}u = 0
$$

および

$$
(1.6)\qquad (r(t)|u''|^{\alpha-1}u'')'' + p(t)|u|^{\beta-1}u = 0
$$

を含む形であり, (1.5) についての振動理論については内藤 [5], 北村 [3] などの, (1.6) についての振動理論については Wu [8], 内藤-Wu [7], 加茂-宇佐美 [1, 2] などの研究があることを注意しておく. ここで, (1.5), (1.6) において, α, β は正の定数, $r_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $r(t)$, $p(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上の正値連続関数である.

2. 定理

最初にこの論文の基礎となる定理を述べておく. それは, 微分方程式系 (1.1) の非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ の成分の符号に関するものである. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が (1.1) の解ならば, $-\boldsymbol{u}(t) = (-u_1(t), -u_2(t), -u_3(t), -u_4(t))$ も (1.1) の解であるから, 我々は非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t)$ の第 1 成分 $u_1(t)$ は終局的に正値であるとして一般性を失わない:

$$
(2.1)\qquad u_1(t) > 0 \quad \text{for all large } t.
$$

定理 2.1. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が (1.1) の非振動的な解であり (2.1) を満たしていれば, 次の 4 つのうちの 1 つが起こる: 十分大きなすべての t に対して

$$(2.2)\qquad u_1(t)>0,\quad u_2(t)>0,\quad u_3(t)<0,\quad u_4(t)<0;$$

$$(2.3)\qquad u_1(t)>0,\quad u_2(t)>0,\quad u_3(t)>0,\quad u_4(t)>0;$$

$$(2.4)\qquad u_1(t)>0,\quad u_2(t)>0,\quad u_3(t)<0,\quad u_4(t)>0;$$

$$(2.5)\qquad u_1(t)>0,\quad u_2(t)<0,\quad u_3(t)>0,\quad u_4(t)>0.$$

以下, この節では, 絶えず (1.4) を仮定しておく. 方程式系 (1.1) の非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ で (2.2) ~ (2.5) を満たすものの存在性について, それぞれ, 次のことが知られている (これらの一部は既に報告した [6]).

定理 2.2. 積分条件

$$(2.6)\qquad \int_{t_0}^{\infty} a_2(s)\left[\int_{t_0}^{s} a_3(r)\left\{\int_{t_0}^{r} a_4(q)\left(\int_{t_0}^{q} a_1(p)\,dp\right)^{\lambda_4} dq\right\}^{\lambda_3} dr\right]^{\lambda_2} ds<\infty$$

が成立していれば, 方程式系 (1.1) は (2.2) を満たす解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ をもつ.

定理 2.3. 方程式系 (1.1) が (2.3) を満たす解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ をもつための必要十分条件は

$$(2.7)\qquad \int_{t_0}^{\infty} a_4(s)\left(\int_{t_0}^{s} a_1(r)\,dr\right)^{\lambda_4} ds<\infty$$

が成立することである.

定理 2.4. 方程式系 (1.1) が (2.4) を満たす解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ をもつための必要十分条件は

$$(2.8)\qquad \int_{t_0}^{\infty} a_3(s)\left(\int_{s}^{\infty} a_4(r)\,dr\right)^{\lambda_3} ds<\infty$$

が成立することである.

定理 2.5. 積分条件

$$(2.9)\qquad \int_{t_0}^{\infty} a_3(s)\left[\int_{s}^{\infty} a_4(r)\left\{\int_{r}^{\infty} a_1(q)\left(\int_{q}^{\infty} a_2(p)\,dp\right)^{\lambda_1} dq\right\}^{\lambda_4} dr\right]^{\lambda_3} ds<\infty$$

が成立していれば, 方程式系 (1.1) は (2.5) を満たす解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ をもつ.

定理2.3, 定理 2.4 では, (2.3), (2.4) を満たす非振動的な解の存在が, それぞれ, 必要十分条件の形で明確に得られている (しかも, λ_i $(i=1,2,3,4)$ について何も前提となる条

件が課せられていない). しかし, 定理 2.2, 定理 2.5 では, それぞれ, (2.2), (2.5) を満たす非振動的な解の存在性の十分条件しか得られていない. そこで, 次に, (2.2), (2.5) を満たす非振動的な解の存在性の必要条件を求めてみる. このときには, λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ について或る前提を置かなければならない.

定理 2.6. (i) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 < 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.2) を満たす非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件は (2.6) が成立することである.

(ii) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 > 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.2) を満たす非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもてば

$$\int_{t_0}^{\infty} a_3(s)\left[\int_{t_0}^{s} a_4(r)\left\{\int_{t_0}^{r} a_1(q)\,dq\right\}^{\lambda_4} dr\right]^{\lambda_3}\left(\int_{s}^{\infty} a_2(r)\,dr\right)^{\lambda_1\lambda_3\lambda_4} ds < \infty \tag{2.10}$$

が成立する.

定理 2.7. (i) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 < 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.5) を満たす非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもてば

$$\int_{t_0}^{\infty} a_4(s)\left\{\int_{s}^{\infty} a_1(r)\left(\int_{r}^{\infty} a_2(q)\,dq\right)^{\lambda_1} dr\right\}^{\lambda_4}\left(\int_{t_0}^{s} a_3(r)\,dr\right)^{\lambda_1\lambda_2\lambda_4} ds < \infty \tag{2.11}$$

が成立する.

(ii) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 > 1$ と仮定する. このとき, 方程式系 (1.1) が (2.5) を満たす非振動的な解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件は (2.9) が成立することである.

3. 系

上記の結果を単独方程式 (1.6) に適用してみよう. ここで, (1.6) において, α, β は正の定数, $r(t)$, $p(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上の正値連続関数である. まず, (1.6) は方程式系

$$\begin{cases} u_1' = |u_2|\operatorname{sgn} u_2 \\ u_2' = \dfrac{1}{(r(t))^{1/\alpha}}|u_3|^{1/\alpha}\operatorname{sgn} u_3 \\ u_3' = |u_4|\operatorname{sgn} u_4 \\ u_4' = -p(t)|u_1|^{\beta}\operatorname{sgn} u_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

に書き直されることに注意する. これは (1.1) で

$$a_1(t) \equiv 1, \quad a_2(t) = \frac{1}{(r(t))^{1/\alpha}}, \quad a_3(t) \equiv 1, \quad a_4(t) = p(t);$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = \beta$$

の場合である. 簡単のため, (1.6) における $r(t)$ は条件

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{r(t)}{t^k} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{r(t)}{t^k} < \infty \qquad \text{for some } k \in \boldsymbol{R} \tag{3.2}$$

を満たしていると仮定する. このとき, 条件 (1.4) は $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ に帰着される. 定理2.2 ~ 定理2.7 を (3.1) に適用して次の結果を得る.

系 3.1. 単独方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し, $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする. さらに, $\alpha > \beta$ とする. このとき

(i) (1.6) が (2.2) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{t^k} \int_{t_0}^{t} (t-s) s^\beta p(s) ds \right)^{1/\alpha} dt < \infty. \tag{3.3}$$

(ii) (1.6) が (2.3) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^\beta p(t) dt < \infty. \tag{3.4}$$

(iii) (1.6) が (2.4) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t p(t) dt < \infty. \tag{3.5}$$

(iv) (1.6) が (2.5) を満たす解をもつための必要条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\frac{\beta}{\alpha} + (-\frac{k}{\alpha} + 2)\beta} p(t) dt < \infty. \tag{3.6}$$

ところが, $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ かつ $\alpha > \beta$ の下では, (3.4) ならば (3.3); (3.5) ならば (3.3); (3.6) ならば (3.3) であることが証明できる. よって, (1.6) が非振動的な解をもてばいつでも (3.3) が成り立つ. 逆に, (3.3) が成り立っていれば, 系 3.1 の (i) によって, [(2.2) を満たす] 非振動的な解をもつ. 従って, 次の系を得る.

系 3.2. 方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し, $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする. さらに, $\alpha > \beta$ とする. このとき, 方程式 (1.6) が非振動的な解をもつための必要十分条件は (3.3) が成り立つことである.

同様にして我々は次を得る.

系 3.3. 単独方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し, $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする. さらに, $\alpha < \beta$ とする. このとき

(i) (1.6) が (2.2) を満たす解をもつための必要条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{(-\frac{k}{\alpha}+1)\beta}\left(\int_{t_0}^{t} s^{\beta}p(s)ds\right)dt < \infty. \tag{3.7}$$

(ii) (1.6) が (2.3) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\beta}p(t)dt < \infty. \tag{3.4}$$

(iii) (1.6) が (2.4) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} tp(t)dt < \infty. \tag{3.5}$$

(iv) (1.6) が (2.5) を満たす解をもつための必要十分条件は

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{1+(-\frac{k}{\alpha}+2)\beta}p(t)dt < \infty. \tag{3.8}$$

系 3.4. 方程式 (1.6) において (3.2) を仮定し, $k > 2\alpha$, $k > \alpha + 1$ が満たされているとする. さらに, $\alpha < \beta$ とする. このとき, 方程式 (1.6) が非振動的な解をもつための必要十分条件は (3.8) が成り立つことである.

引用文献

[1] K.-I. Kamo and H. Usami, Oscillation theorems for fourth-order quasilinear ordinary differential equations, Studia Sci. Math. Hungar., **39**(2002), 385–406.

[2] 加茂 憲一, 宇佐美 広介, 4 階準線形常微分方程式の振動定理, 京都大学数理解析研究所講究録 1254「関数方程式の解のダイナミクスとその周辺」, pp. 1–7, 2002.

[3] Y. Kitamura, Characterization of oscillation of fourth order functional differential equations with deviating arguments, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **124**(1980), 345–365.

[4] T. Kusano, M. Naito and Wu F., On the oscillation of solutions of 4-dimensional Emden-Fowler differential systems, Adv. Math. Sci. Appl., **11**(2001), 685–719.

[5] M. Naito, On positive solutions of fourth order nonlinear differential inequalities, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **117**(1978), 79–113.

[6] 内藤 学, On the asymptotic behavior of solutions of 4-dimensional Emden-Fowler differential systems, 京都大学数理解析研究所講究録 1309「関数方程式と数理モデル」, pp. 222–228, 2003.

[7] M. Naito and Wu F., On the existence of eventually positive solutions of fourth order quasilinear differential equations, submitted for publication.

[8] Wu F., Nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations, Funkcial. Ekvac., **45**(2002), 71–88.